





© 2006 Blackwell Publishing Ltd

عدد الذرات الجزيئية في الزمرة  $(U(A))$  يساوي عدد ذرات  
الزمرة  $A$  نفسها.

101 102 103 104

$$U(F) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

والتالي فان  $u(9)$  هي  $u(9) = 0(9)$  و  
 فان عدد اقسام الزمرة  $G$  هو  $9$



5614

5/26 (1961) , 5/17/68 and 4/4/69

$$U(30) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$V_1(\text{mol}) = 1.1 \text{ mol}$$

$$m \cdot (U(2n)) \leq 8 \cdot (U(2n)) \cdot n \cdot 2$$

مجلسی عالیہ اسلامیہ دارالعلوم دیوبند

$$\begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(2\pi) : 1 \\ U_2(2\pi) : 1 \end{pmatrix} + \dots$$

82 C.V. 2013-0001 (SU)

2.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

07602

قاعدة: دالة  $f$  من  $Z_n \oplus Z_m$  إلى  $Z_k$  تكون  $f(a, b) = ka + mb \pmod k$ .

$$O(a, b) = \text{ICM}(O(a), O(b))$$

بمعنى آخر  $\text{ICM}$  هو دالة من  $Z_n$  إلى  $Z_n$ .

$O(a)$  هي دالة من  $Z_n$  إلى  $Z_n$ .

$O(b)$  هي دالة من  $Z_m$  إلى  $Z_m$ .

لنأخذ مثالاً:  $n=6, m=4, k=2$ .  
دالة  $f$  من  $Z_6 \oplus Z_4$  إلى  $Z_2$  تكون  $f(a, b) = 2a + 2b \pmod 2$ .

$$O(1) = \{x \in Z_6 : f(x, 0) = 0\} = \{0, 3\} \pmod 6$$

$$K=1 \Rightarrow 1 \times 1 = 1 \neq 0$$

$$K=2 \Rightarrow 2 \times 1 = 2 \neq 0$$

$$K=3 \Rightarrow 3 \times 1 = 3 \neq 0$$

$$K=15 \Rightarrow 15 \times 1 = 15 \pmod{15} = 0 \Rightarrow O(1) = 15$$

دالة  $f$  من  $Z_6 \oplus Z_4$  إلى  $Z_2$  تكون  $f(a, b) = 2a + 2b \pmod 2$ .

$$O(4) = \{x \in Z_6 : f(x, 4) = 0\} = \{0, 3\} \pmod 6$$

$$K=1 \Rightarrow 1 \times 4 = 4 \neq 0$$

$$K=2 \Rightarrow 2 \times 4 = 8 \neq 0$$

$$K=3 \Rightarrow 3 \times 4 = 12 \neq 0$$

$$K=4 \Rightarrow 4 \times 4 = 16 \neq 0$$

$$\Rightarrow K=5 \Rightarrow 5 \times 4 = 20 \pmod{20} = 0 \Rightarrow O(4) = 5$$

$$\Rightarrow O(1, 4) = \text{ICM}(O(1), O(4)) = \text{ICM}(15, 5) = 15$$

$$\Rightarrow O(1, 4) = 15$$





القول الثاني:

[1] لكل  $G$  زمرة متناهية و  $H$  زمرة فرعية من  $G$  متناهية:

$$(G:H) = (G:H)(H:H)$$

فإن  $(H:H)$  هي زمرة فرعية من  $G$  متناهية فبما  $G$  متناهية فإن  $(H:H)$  متناهية:

لكن  $(a_1H, a_2H, \dots, a_nH)$  هي زمرة فرعية من  $G$  متناهية فبما  $G$  متناهية فإن  $(a_1H, a_2H, \dots, a_nH)$  متناهية:

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$$

$$\text{Card } G = \text{Card } a_1H + \text{Card } a_2H + \dots + \text{Card } a_nH$$

$$\text{Card } a_iH = \text{Card } H \quad \text{لأن } a_iH \text{ هي زمرة فرعية من } G \text{ متناهية}$$

$$\Rightarrow \text{Card } G = n \text{ Card } H$$

$$\Rightarrow \text{Card } G = (G:H)(H:H)$$

$$\Rightarrow (G:H) = (G:H)(H:H)$$

$$[2] \text{ لنفرض أن } (ab)^n = e \text{ ولنفرض أن } a \text{ و } b \text{ هما عنصران من } G \text{ متناهية}$$

$$(ab)^n = e \text{ ولنفرض أن } a \text{ و } b \text{ هما عنصران من } G \text{ متناهية}$$

$$(ab)^n = e \text{ ولنفرض أن } a \text{ و } b \text{ هما عنصران من } G \text{ متناهية}$$

$$a^n = e \text{ ولنفرض أن } a \text{ و } b \text{ هما عنصران من } G \text{ متناهية}$$

17  
 $G/Z(G)$  : مجموعة جزئية طبيعية لـ  $G$

$$G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle \quad : g \in G$$

لـ  $ab \in G$  :  $abZ(G) = (aZ(G))(bZ(G))$  :  $abZ(G) = aZ(G)bZ(G)$

$$a \in G \Rightarrow aZ(G) \in G/Z(G)$$

$$b \in G \Rightarrow bZ(G) \in G/Z(G)$$

$\therefore G/Z(G)$  : مجموعة جزئية طبيعية لـ  $G/Z(G)$

$$aZ(G) (gZ(G))^i = a^i Z(G)$$

$$bZ(G) (gZ(G))^i = g^i Z(G) \quad \text{لـ } g \in G$$

$$a \in aZ(G) \quad b \in bZ(G)$$

$$a g^i x b g^j y = a g^i g^j x b g^j y = a g^{i+j} x b g^j y$$

$$\Rightarrow ab = g^i x g^j y = g^i g^j x y = g^{i+j} x y = a g^{i+j} x b g^j y$$

(4)  $AB = \langle A \cup B \rangle$  : مجموعة جزئية طبيعية لـ  $AB$

$$x \in A \cup B \Rightarrow \text{و } x \in A \text{ أو } x \in B$$

$$y \in A : x : x \in A \Rightarrow xy \in AB$$

$$y \in B : x : xy \in AB \quad \text{لـ } A \cup B \subseteq AB$$

$$\langle A \cup B \rangle \subseteq AB$$

$$x = ab \quad \text{لـ } a \in A \text{ و } b \in B \Rightarrow ab \in AB$$

$$\Rightarrow a, b \in A \cup B \subseteq \langle A \cup B \rangle$$

$$\Rightarrow AB \subseteq \langle A \cup B \rangle$$

$$\text{لـ } AB = \langle A \cup B \rangle$$



لنتذكر أن  $\ker f$  مجموعة جزئية من  $G$

$\ker f \subseteq G$  مجموعة جزئية من  $G$  لأن  $f(1_G) = 1_{H^*}$  أي  $1_G \in \ker f$   
 وإذا كان  $x \in \ker f$  و  $y \in \ker f$  فإن  $f(xy) = f(x)f(y) = 1_{H^*} \cdot 1_{H^*} = 1_{H^*}$  أي  $xy \in \ker f$

أي أن  $\ker f$  مجموعة جزئية من  $G$  تحت  $\cdot$  و  $^{-1}$   
 أي  $x, y \in \ker f \Rightarrow xy^{-1} \in \ker f$

أي أن  $\ker f$  مجموعة جزئية من  $G$  تحت  $\cdot$  و  $^{-1}$   
 أي  $x, y \in \ker f \Rightarrow xy^{-1} \in \ker f$   
 $\Rightarrow f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = 1_{H^*} \cdot 1_{H^*}^{-1} = 1_{H^*}$

أي أن  $\ker f \Rightarrow \ker f \cdot \ker f = \ker f$

لنتذكر أن  $f$  مجموعة جزئية من  $G$  تحت  $\cdot$  و  $^{-1}$   
 $\forall g \in G \quad g \ker f g^{-1} \subseteq \ker f$

أي  $x \in \ker f$  و  $g \in G$  فإن  $g x g^{-1} \in \ker f$   
 أي  $f(g x g^{-1}) = 1_{H^*}$

أي أن  $f(g x g^{-1}) = f(g) f(x) f(g)^{-1} = 1_{H^*}$   
 $\Rightarrow f(g) f(x) f(g)^{-1} = 1_{H^*}$

أي أن  $f(x) = 1_{H^*}$  أي  $x \in \ker f$   
 $\Rightarrow f(x) = 1_{H^*}$  أي  $x \in \ker f$

أي أن  $g \ker f g^{-1} \subseteq \ker f$

فإن  $f$  مجموعة جزئية من  $G$  تحت  $\cdot$  و  $^{-1}$

$f(x) = 1_{H^*} \Rightarrow x \in \ker f$

أي أن  $\ker f$  مجموعة جزئية من  $G$  تحت  $\cdot$  و  $^{-1}$   
 $\ker f = \{x \in G, f(x) = 1_{H^*}\}$   
 أي أن  $\ker f$  مجموعة جزئية من  $G$  تحت  $\cdot$  و  $^{-1}$